Matematica finanziaria: svolgimento prova di esame del 21 giugno 2005 (con esercizio 1 corretto)

1. **[6 punti cleai, 6 punti altri]** Si possiede un capitale di 1000€ e lo si vuole impiegare per 3 anni. Supponendo che eventuali ricavi intermedi vengano reinvestiti con una legge di interesse composto al 2% trimestrale, calcolare il montante nelle seguenti due ipotesi di investimento:

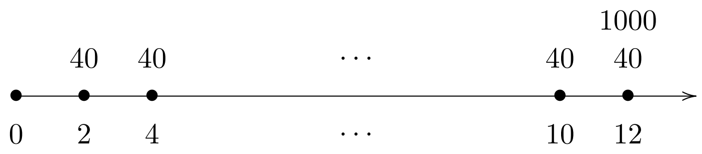
   (a) regime di interesse composto al tasso d'interesse effettivo del 9% annuo;

   (b) regime di interesse composto al tasso d'interesse nominale dell'8% annuo, pagabile ogni 6 mesi.

   Svolgimento. Il punto (a) è immediato. In regime d'interesse composto con un tasso d'interesse effettivo non ci sono ricavi intermedi da reinvestire, pertanto il montante è

$$M_{\mathrm{a}} = 1000(1 + 0.09)^3 = 1295.03.$$

   Nel caso (b), invece, si ha a che fare con un tasso d'interesse *nominale*: 8% di 1000€ significa 80€ "all'anno", e pagabili ogni 6 mesi significa che ogni 6 mesi si incasserà una cedola di 40€. Alla fine del periodo d'investimento, inoltre, ci verrà restituito il capitale iniziale di 1000€. Il grafico di questo investimento è dunque



   Notare che conviene usare come unità di misura il trimestre, visto che il tasso di reinvestimento è trimestrale, e dunque la prima cedola viene incassata al tempo due trimestri (cioè un semestre) e così via.

   I ricavi intermedi (le cedole semestrali di 40€) vanno reinvestiti tramite la legge $r(t) = (1 + 0.02)^t$ (dove t misura il tempo, come già detto, in trimestri). La prima cedola essendo capitalizzata per 10 trimestri, fornirà un montante di $40 \cdot 1.02^{10}$, la seconda fornirà un montante di $40 \cdot 1.02^8$, e così via. Il montante finale sarà

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{b}} &= 40 \cdot 1.02^{10} + 40 \cdot 1.02^8 + 40 \cdot 1.02^6 + 40 \cdot 1.02^4 + 40 \cdot 1.02^2 + 40 + 1000 \\ &= 1265.59. \end{aligned}$$

■

2. **[7 punti cleai, 6 punti altri]** Sapendo che la forza d'interesse è

$$\delta(t) = \frac{0.3t^2}{1 + 0.1t^3}$$

   calcolare la legge finanziaria $r(t)$, dire se si tratta di una legge scindibile e calcolare il montante di proseguimento $M(1, 3)$ al terzo anno di un capitale che al primo anno risulta di 100€.

   Svolgimento. Data la forza d'interesse $\delta(t)$ di una legge finanziaria $r(t)$, sappiamo che

$$r(s) = \exp \int_0^s \delta(t)\, dt.$$

   L'esercizio si può quindi apparentemente svolgere solo se si è in grado di calcolare

$$\int_0^s \frac{0.3t^2}{1 + 0.1t^3}\, dt.$$

   Non è così. Sappiamo infatti che la forza d'interesse è $r'(t)/r(t)$, e il numeratore di $\frac{0.3t^2}{1+0.1t^3}$ è proprio la derivata del denominatore! Quindi anche senza fare esplicitamente l'integrale abbiamo trovato

$$r(t) = 1 + 0.1t^3.$$

Le leggi scindibili in una variabile sono solo quelle esponenziali, quindi $r(t)$ non è scindibile (cosa evidente anche dal fatto che la forza d'interesse non è costante). Il montante di proseguimento, infine, si ottiene scontando 100€ di un anno, e poi capitalizzando il risultato per 3 anni. Dunque

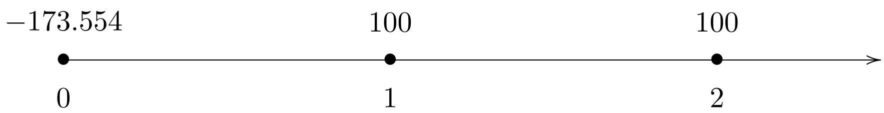
$$M = \frac{100}{r(1)} r(3) = \frac{100}{1 + 0.1 \cdot 1^3}(1 + 0.1 \cdot 3^3) = 336.364.$$

Notare che poiché $r(t)$ non è scindibile, il montante di proseguimento è diverso da quello che si otterrebbe semplicemente capitalizzando i 100 euro per i restanti due anni:

$$M \neq 100(1 + 0.1 \cdot 2^3) = 180.$$

3. **[4 punti cleai, 4 punti altri]** Calcolare il tasso mensile di rendimento dell'operazione finanziaria consistente nell'acquistare due cedole da 100€ mensili posticipate al prezzo di 173.554€.

Svolgimento. Il grafico dell'operazione finanziaria consistente nell'acquisto delle due cedole è



Posto $\nu = 1/(1+i)$, il $\textsc{rea}(i)$ di questa operazione finanziaria è

$$\textsc{rea}(i) = -173.554 + 100\nu + 100\nu^2$$

L'equazione che permette di determinare il tasso mensile di rendimento i è $\textsc{rea}(i) = 0$, cioè

$$-173.554 + 100\nu + 100\nu^2 = 0 \iff \nu = \frac{-50 + \sqrt{50^2 + 100 \cdot 173.554}}{100} = \frac{-50 + \sqrt{19855.4}}{100}$$

Notare che abbiamo scartato la soluzione negativa, in quanto priva di significato finanziario. La soluzione scelta è sicuramente positiva, per il teorema di Cartesio.

Il tasso mensile di rendimento i è quindi

$$i = \frac{1}{\nu} - 1 = \frac{100}{-50 + \sqrt{19855.4}} - 1 \simeq 0.1$$

4. **[4 punti cleai, 4 punti altri]** Si vuole concedere un prestito di 2000€ rimborsabile in 4 anni con quota capitale costante, con rate annuali e posticipate. Si vuole che il rendimento effettivo del prestito sia del 10%. Scrivere il piano di ammortamento.

Svolgimento. Essendo l'ammortamento dei 2000€ di tipo italiano su 4 anni, la quota capitale è pari a $2000/4 = 500$€. La quota interessi sarà ogni anno pari al 10% del capitale da versare, e dunque $I_1 = 200$, $I_2 = 150$, $I_3 = 100$, $I_4 = 50$.

Il piano di ammortamento è allora:

anno	QC	QI	Rata	DR
1	500	200	700	1500
2	500	150	650	1000
3	500	100	600	500
4	500	50	550	0

5. [**5 punti cleai, 4 punti altri**] Calcolare (al meglio di due cifre decimali) il TAN e il TAEG di un finanziamento di 2000€ in 4 rate annuali da 550€, supponendo le spese accessorie pari a 50€ per l'apertura del finanziamento.

Svolgimento. Questo finanziamento si sintetizza, dal punto di vista del debitore, nel seguente grafico:

$$
\begin{array}{ccccc}
-50 & & & & \\
2000 & -550 & -550 & -550 & -550 \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4
\end{array}
$$

Sia TAN che TAEG esistono perchè l'operazione è un finanziamento.

Il TAN non è 0, visto che la somma delle rate è maggiore della somma finanziata. Calcoliamolo risolvendo con metodi numerici l'equazione in $\nu = 1/(1+i)$

$$f(\nu) = 2000 - 550\nu - 550\nu^2 - 550\nu^3 - 550\nu^4 = 0.$$

Poiché

$$f(0.9) > 0, f(1) < 0, f(0.95) > 0, f(0.96) > 0, f(0.97) < 0, f(0.965) < 0$$

otteniamo che $\nu \in (0.96, 0.965)$, e possiamo approssimarlo al meglio di due cifre decimali con 0.96. Il TAN è allora:

$$\text{TAN} = \frac{1}{\nu} - 1 \simeq 0.04.$$

Il TAEG si trova risolvendo

$$f(\nu) = 1950 - 550\nu - 550\nu^2 - 550\nu^3 - 550\nu^4 = 0.$$

Poiché

$$f(0.9) > 0, f(1) < 0, f(0.95) > 0, f(0.96) < 0, f(0.955) < 0$$

otteniamo che $\nu \in (0.95, 0.955)$, e possiamo approssimarlo al meglio di due cifre decimali con 0.95. Il TAEG è allora:

$$\text{TAEG} = \frac{1}{\nu} - 1 \simeq 0.05.$$

■

6. [**4 punti cleai, 4 punti altri**] Un'industria concepisce un nuovo prodotto, i cui costi di produzione sono descritti nel seguente modo:

- 100000€ al tempo $t = 0$, 50000€ al tempo $t = 3$;
- 1000 ore di lavoro all'anno, al costo di 20€ per ora, e 10 tonnellate di materiale grezzo all'anno, al costo di 80€ per tonnellata;

Indagini di mercato stimano che:

(a) il prodotto resterà in commercio per 5 anni esatti;
(b) ogni anno si venderanno 1000 unità di prodotto, al prezzo di 150€ per unità;

Il costo di produzione iniziale (e solo quello) può essere detratto dal ricavo di cui al punto b in maniera uniforme durante i 5 anni, e su quel che resta si applica una tassazione del 20%. Determinare la funzione REA-tasso di valutazione, e in particolare calcolare REA(0.1).

Svolgimento. Si tratta solo di determinare i numeri da mettere sull'asse dei tempi per rappresentare graficamente l'operazione finanziaria.

Per la produzione, ogni anno si spende $1000 \cdot 20 = 20000$€ di manodopera e $10 \cdot 80 = 800$€ di materiale grezzo. Inoltre, si hanno i costi una tantum di 100000€ all'inizio e di 50000€ dopo tre anni.

Vendendo il prodotto si stima di incassare $1000 \cdot 150 = 150000$€ ogni anno, per 5 anni.

Quindi, l'operazione finanziaria senza tasse è (in migliaia di euro):

0	1	2	3	4	5
	+150	+150	+150	+150	+150
	−20.8	−20.8	−20.8	−20.8	−20.8
−100			−50		

I 150000€ di ricavo annuale vanno tassati al 20%, ma prima bisogna detrarre il costo di produzione iniziale, cioè i 100000€, in maniera uniforme sui 5 anni. Le tasse da pagare annualmente non vanno perciò calcolate su 150000€, ma su $150000 - 100000/5 = 130000$€. Al grafico di cui sopra dobbiamo pertanto aggiungere un'uscita annuale di 26000€(20% di 130000€).

0	1	2	3	4	5
	+150	+150	+150	+150	+150
	−46.8	−46.8	−46.8	−46.8	−46.8
−100			−50		

Denotando con i il tasso di valutazione, la funzione richiesta è:

$$\textsc{rea}(i) = -100 + \frac{103.2}{1+i} + \frac{103.2}{(1+i)^2} + \frac{53.2}{(1+i)^3} + \frac{103.2}{(1+i)^4} + \frac{103.2}{(1+i)^5} \tag{1}$$

e in particolare si ottiene

$$\textsc{rea}(0.1) = -100 + \frac{103.2}{1.1} + \frac{103.2}{1.1^2} + \frac{53.2}{1.1^3} + \frac{103.2}{1.1^4} + \frac{103.2}{1.1^5} = 253.643. \tag{2}$$

■

7. **[5 punti cleai, 4 punti altri]** I titoli A, B, C, D dati dalla tabella 1 sono venduti in maniera tale da produrre $\textsc{ytm} = 0.1$. Calcolare la durata media finanziaria e la convessità per ciascuno di essi.

Tabella 1: Titoli A, B, C, D.

anno di pagamento	A	B	C	D
anno 1	80	70	0	1000
anno 2	80	70	0	0
anno 3	1080	1080	1000	0

Svolgimento. Dobbiamo calcolare la DMF e la convessità per ciascuno dei 4 titoli in tabella 1. Per i titoli senza cedole (il C e il D) la risposta è immediata:

$$\textsc{dmf}(C) = 3, \textsc{conv}(C) = 9, \textsc{dmf}(D) = 1 = \textsc{conv}(C).$$

Per A e B, dobbiamo prima di tutto scrivere le loro funzioni REA-forza di interesse:

$$\textsc{rea}_A(\delta) = 80e^{-\delta} + 80e^{-2\delta} + 1080e^{-3\delta}$$
$$\textsc{rea}_B(\delta) = 70e^{-\delta} + 70e^{-2\delta} + 1080e^{-3\delta}$$

Le loro derivate sono allora:

$$\textsc{rea}'_A(\delta) = -80e^{-\delta} - 160e^{-2\delta} - 3240e^{-3\delta}$$
$$\textsc{rea}'_B(\delta) = -70e^{-\delta} - 140e^{-2\delta} - 3240e^{-3\delta}$$
$$\textsc{rea}''_A(\delta) = 80e^{-\delta} + 320e^{-2\delta} + 9720e^{-3\delta}$$
$$\textsc{rea}''_B(\delta) = 70e^{-\delta} + 280e^{-2\delta} + 9720e^{-3\delta}$$

Ricordando allora che $\textsc{ytm} = 0.1$ implica $\delta = \ln 1.1$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
\textsc{rea}_A(0.1) &= 80e^{-\ln 1.1} + 80e^{-2\cdot\ln 1.1} + 1080e^{-3\cdot\ln 1.1} = 950.263\\
\textsc{rea}_B(0.1) &= 70e^{-\ln 1.1} + 70e^{-2\cdot\ln 1.1} + 1080e^{-3\cdot\ln 1.1} = 932.908\\
\textsc{rea}'_A(0.1) &= -80e^{-\ln 1.1} - 160e^{-2\cdot\ln 1.1} - 3240e^{-3\cdot\ln 1.1} = -2639.22\\
\textsc{rea}'_B(0.1) &= -70e^{-\ln 1.1} - 140e^{-2\cdot\ln 1.1} - 3240e^{-3\cdot\ln 1.1} = -2613.6\\
\textsc{rea}''_A(0.1) &= 80e^{-\ln 1.1} + 320e^{-2\cdot\ln 1.1} + 9720e^{-3\cdot\ln 1.1} = 7639.97\\
\textsc{rea}''_B(0.1) &= 70e^{-\ln 1.1} + 280e^{-2\cdot\ln 1.1} + 9720e^{-3\cdot\ln 1.1} = 7597.82
\end{aligned}
$$

e infine:

$$\textsc{dmf}(A) = 2.77736, \textsc{conv}(A) = 8.03985, \textsc{dmf}(B) = 2.80156, \textsc{conv}(B) = 8.14424.$$

■

8. **[no cleai, 3 punti altri]** Si assuma una struttura per scadenze descritta dalla tabella 2, e la si utilizzi per calcolare il REA del progetto di cui all'esercizio 6. Si riesce a dire prima di eseguire il calcolo se tale REA sarà minore o maggiore del REA(0.1) calcolato nell'esercizio 6?

Tabella 2: Tassi spot rilevati per i prossimi 5 anni.

anno	1	2	3	4	5
tasso spot	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

Svolgimento. La tabella 2 fornisce i tassi annuali per investimenti di durata 1, 2, 3, 4, 5 anni rispettivamente. Notiamo che questi tassi sono tutti minori di 0.1, e dunque il REA del progetto (che è funzione decrescente del tasso di valutazione) sarà sicuramente maggiore del REA(0.1) calcolato in (2).

I fattori di sconto presenti nella formula (1) vanno opportunamente modificati usando questi tassi spot:

$$\textsc{rea} = -100 + \frac{103.2}{1+0.05} + \frac{103.2}{(1+0.06)^2} + \frac{53.2}{(1+0.07)^3} + \frac{103.2}{(1+0.08)^4} + \frac{103.2}{(1+0.09)^5} = 276.488.$$

■